Tests statistiques

Statistique L3PRO

Josef WILCZEK

Tests statistiques

Est-ce qu'il y a des différences entre deux ou plusieurs groups?

... entre la taille des H et F

... entre les teneurs de Sn des deux types des haches

... entre les résultats des examens des années 2013 et 2014

Est-ce que

... les gens ont la même poids le matin et le soir

... les produits chimiques ont de l'effet sur la taille des arbres

... les deux chercheurs ont mesuré de la même façon

$\Rightarrow$ On trouve toujours un différence

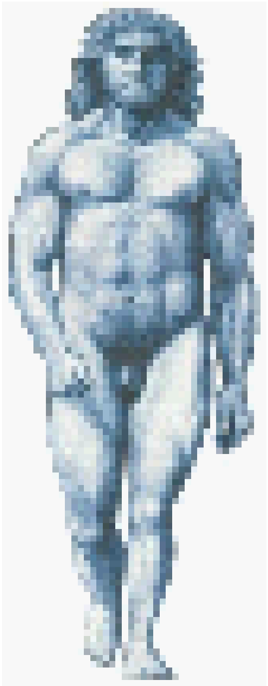
$\Rightarrow$ „A partir de quelle limites on peut conclure une différence?"

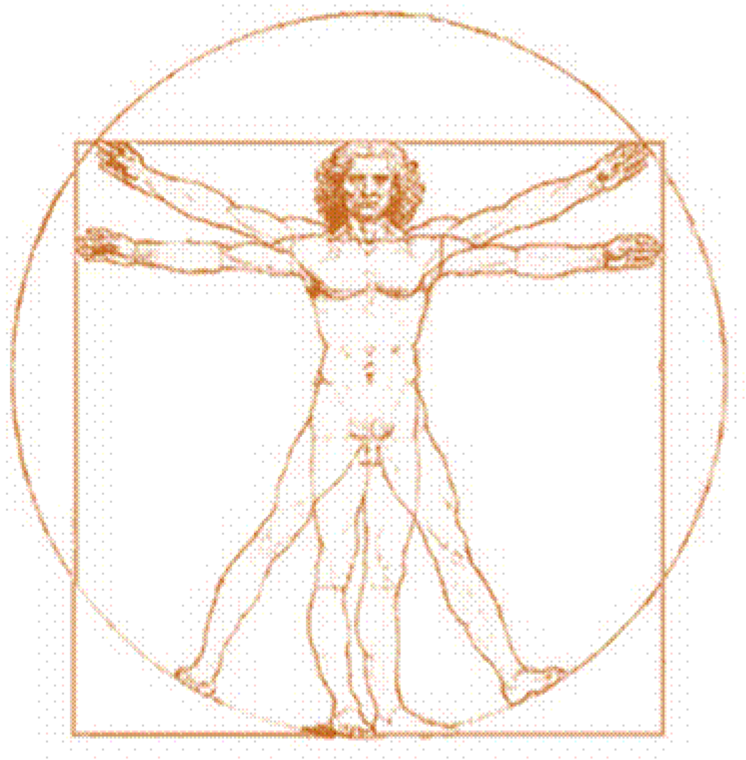
Quel est le problème…?

On sait qu’un homme de neandertal mesure en moyenne 165 cm.

Sur un site on trouve 16 hommes avec une moyenne de 167 cm et un écart type de 8 cm (e.t. échantillon).

Comparaison de la moyenne des hommes avec la valeur théorique de 165 cm





Possibilités:

La moyenne des hommes…

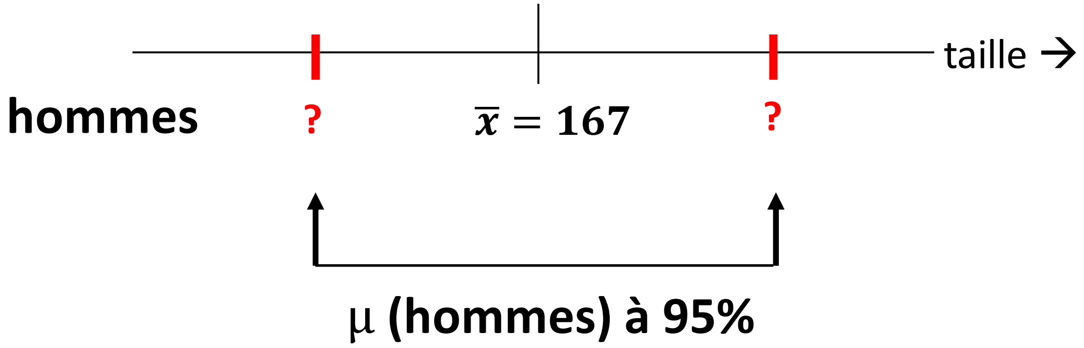
est très élevée: Nous pourrons être amenés à croire que ces hommes ont des tailles différentes de neandertal.

est faiblement plus élevée: on ne pourra pas conclure si c’est significativement supérieur à la taille des neandertal ou si c’est juste l’effet du hasard.

Question: **à partir des quelles limites** pouvons nous raisonnablement conclure à une différence?

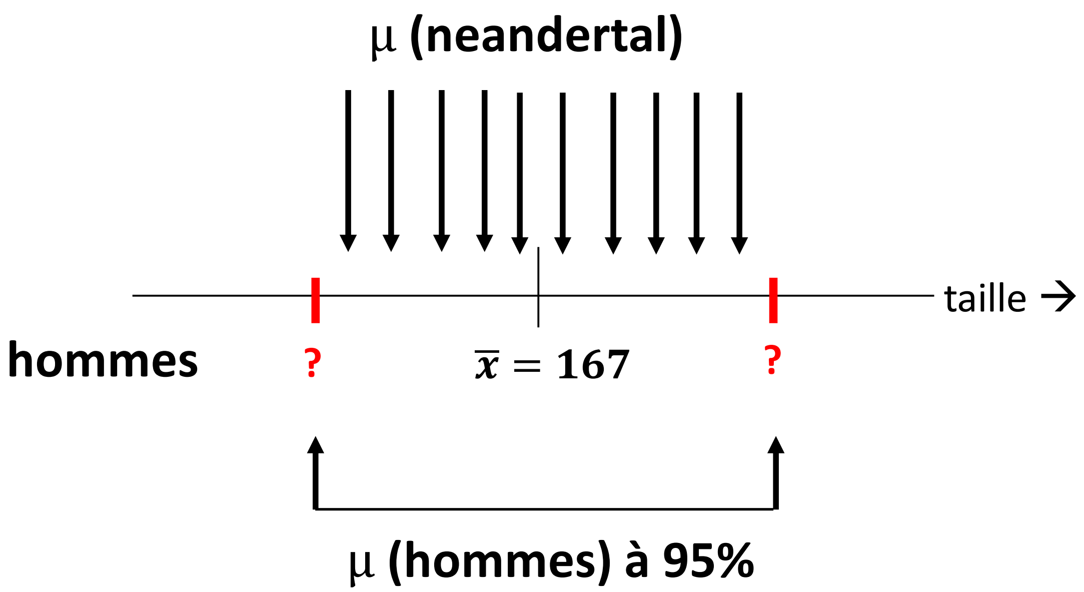
Question: **à partir des quelles limites** pouvons nous raisonnablement conclure à une différence?

$$x \in \left[\bar{x} \pm t_{\alpha/2} \cdot \frac{s_x}{\sqrt{n}}\right] \text{ à 95 \%}$$



Question: **à partir des quelles limites** pouvons nous raisonnablement conclure à une différence?

$$x \in \left[\bar{x} \pm t_{\alpha/2} \cdot \frac{s_x}{\sqrt{n}}\right] \text{ à 95 \%}$$



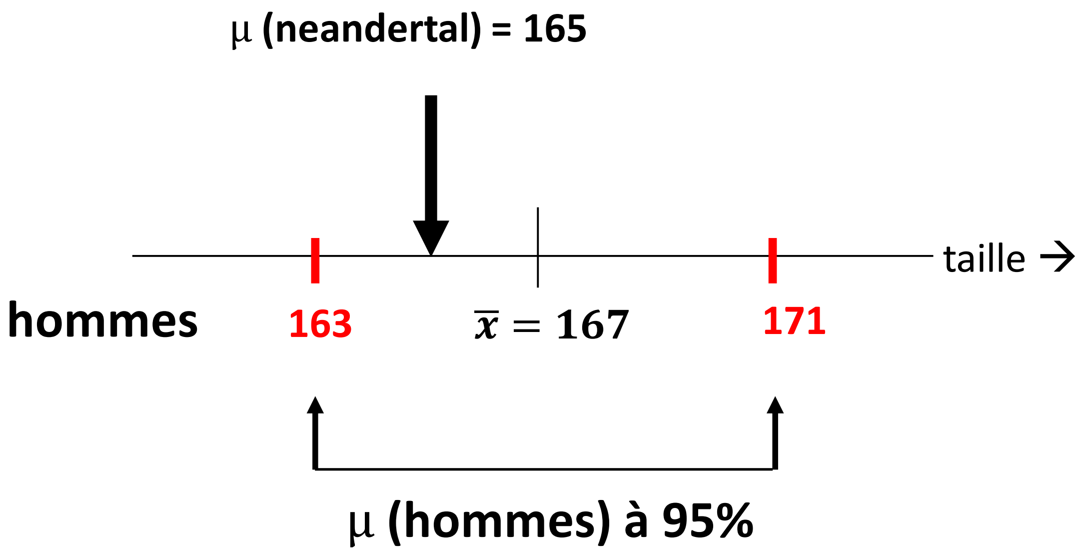
Question: **à partir des quelles limites** pouvons nous raisonnablement conclure à une différence?

$$\boldsymbol{x} \in \left[\overline{\boldsymbol{x}} \pm \boldsymbol{t}_{\alpha/2} \cdot \frac{\boldsymbol{s_x}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}\right] \text{ à 95 \%}$$

$$\boldsymbol{x} \in \left[\mathbf{167 \pm 2,131} \cdot \frac{\mathbf{8}}{\sqrt{\mathbf{16}}}\right]$$

$$\boldsymbol{x} \in [\mathbf{167 \pm 4.3}]$$

$$\boldsymbol{x} \in [\mathbf{163}; \quad \mathbf{171}]$$



Décision:

⇒ les hommes ne sont pas significatement différents des neandertals (a 95 % confiance)

On peut définir deux hypothèse:

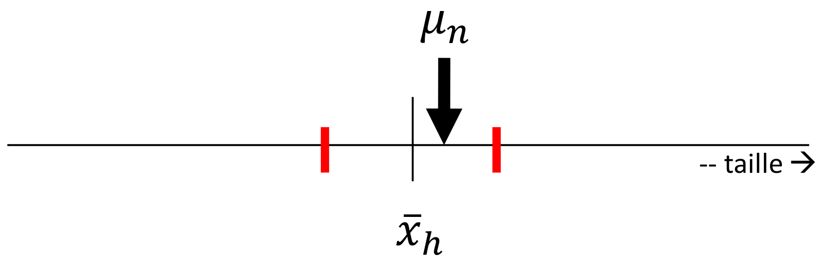
μ (neandertal) = 165

$H_0: \mu_n = \bar{x}_h$ ...il n'y a pas des différences; toutes les différences sont l'effet du hasard

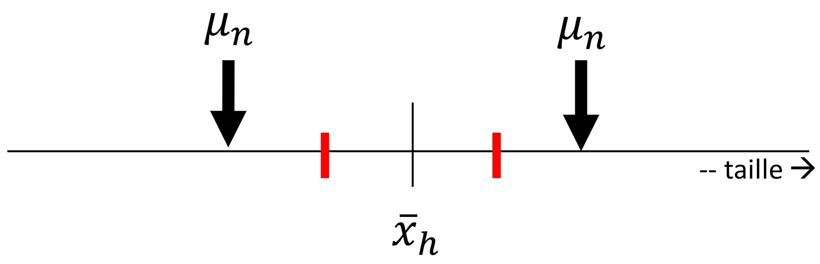
$H_1: \mu_n \neq \bar{x}_h$ ...il y a des différences...

Conditions des décision:

H_0: μ_n dans intervalle de confiance de la moyenne des hommes



H_1: μ_n pas dans cette intervalle



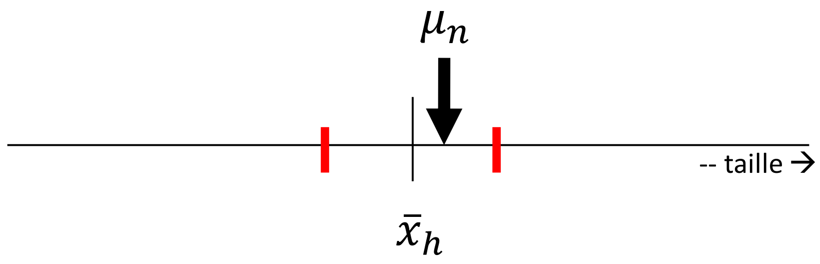
Définition de niveau de confiance: 95%

μ (neandertal) = 165

On peut définir deux hypothèse:

$H_0: \mu_n = \bar{x}_h$ ...il n'y a pas des différences; toutes les différences sont l'effet du hasard

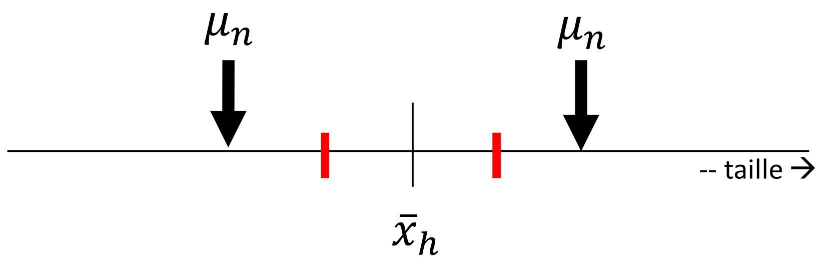
$H_1: \mu_n \neq \bar{x}_h$ ...il y a des différences...



Conditions des décision:

H_0: μ_n dans intervalle de confiance de la moyenne des hommes

H_1: μ_n pas dans cette intervalle

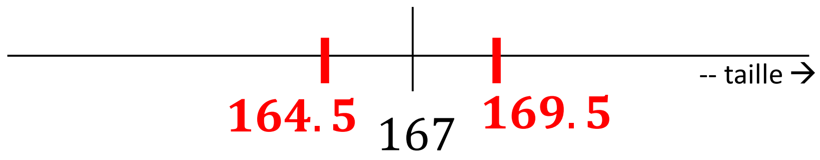


Définition de niveau de confiance: 95%

Calculer le test:

$$x \in \left[167 \pm 1,96 \cdot \frac{8}{\sqrt{40}}\right]$$

$$x \in [164.5; \quad 169,5]$$

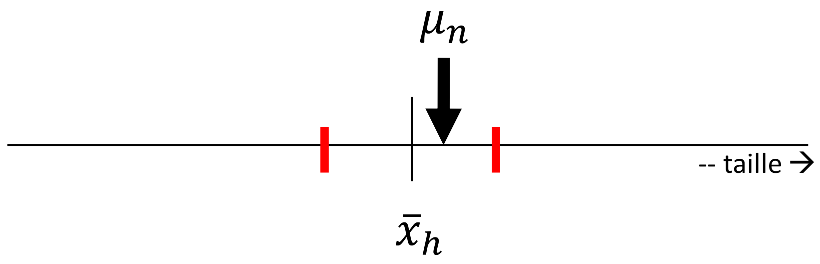


On peut définir deux hypothèse:

μ **(neandertal) = 165**

$H_0: \mu_n = \bar{x}_h$ …il n'y a pas des différences; toutes les différences sont l'effet du hasard

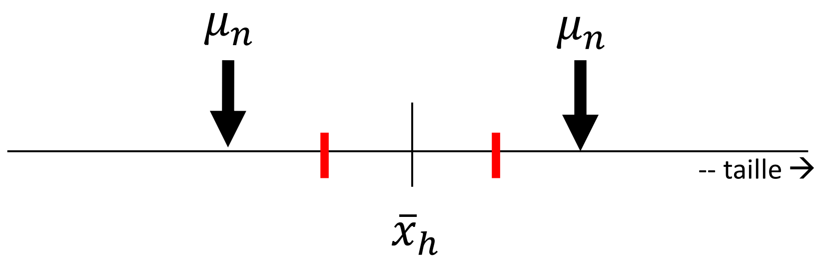
$H_1: \mu_n \neq \bar{x}_h$ …il y a des différences…



Conditions des décision:

H_0: μ_n dans intervalle de confiance de la moyenne des hommes

H_1: μ_n pas dans cette intervalle

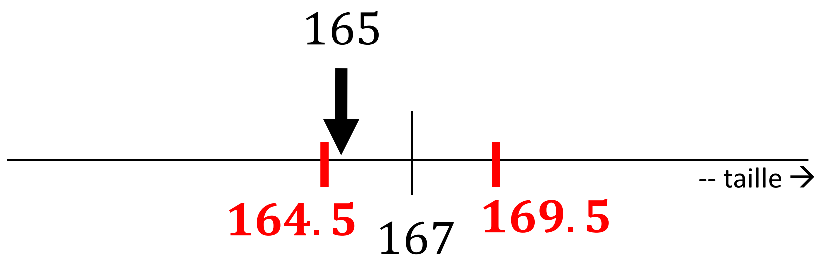


Définition de niveau de confiance: 95%

Calculer le test:

$$\boldsymbol{x} \in \left[\mathbf{167 \pm 1,96 \cdot \frac{8}{\sqrt{40}}}\right]$$

$$\boldsymbol{x} \in [\mathbf{164.5}; \quad \mathbf{169,5}]$$



Décision:

$\Rightarrow$ on accepte H_0

Avant commencer…

- échantillons indépendants et appariées

- des hypothèses

- niveau de signification

Echantillons (groupes) indépendants et appariés

- **Indépendants:** Deux échantillons sont indépendants si aucun individu n'appartient aux deux échantillons simultanément.

- On a **les hommes** et **les femmes** et on mesure leur taille.
- On a **deux types** des haches et on mesure leur poids

	Échantillon (H/F)	valeur
Ind1	H	38
Ind2	H	42
Ind3	F	24
Ind4	F	23

- **Apparié**: On dispose d'un seul groupe d'individus auquel on associe deux taches différentes (avant et après).

- On veut savoir si la gymnastique a eu de l'effet sur le poids des gens il faut prendre le poids de chaque individu **avant** et **après** avoir fait de l'exercice.

	valeur	
	Tache 1	Tache 2
Ind1	24	38
Ind2	26	42
Ind3	24	32

Des hypothèses

Exemple: On a deux groupes des gens (les hommes et les femmes) et on veut savoir s'il y a une différence entre leur taille.

$\boldsymbol{H_0}$**: hypothèse nulle (**$\boldsymbol{\mu_H = \mu_F}$**)**

H_0 : il n'y pas de la différence entre la taille des hommes et les femmes **(**$\boldsymbol{\mu_H = \mu_F}$**)**.

$\boldsymbol{H_1}$**: hypothèse alternative bilatéral (**$\boldsymbol{\mu_H \neq \mu_F}$**)**

H_1 : il y a la différence entre les hommes et femmes $(\boldsymbol{\mu_H \neq \mu_F})$.

$\boldsymbol{H_1}$**: hypothèse alternative unilatéral (**$\boldsymbol{\mu_H > \mu_F}$ **ou** $\boldsymbol{\mu_H < \mu_F}$**)**

H_1 : Les hommes sont plus grands que les femmes $(\boldsymbol{\mu_H > \mu_F})$

H_1 : Les hommes sont plus petits que les femmes $(\boldsymbol{\mu_H < \mu_F})$

Niveau de signification (α)

- risque qu‘on prends quand on choisi une des hypothèses.
- Pourquoi? Car rien est jamais sûr…

« J‘ai trouvé que la taille des femmes et des hommes est diffèrent. »
…juste l’effet du hasard?

Hasard

- j‘ai mal choisi les échantillons (les petits femmes, les grands hommes)
- j‘ai mal déterminé le genre
- j‘ai fait des erreurs des mesures…
- fluctuation d’échantillonage
- …

Niveau de signification (α)

Erreur de 2nde espèce (compliquée)

		La réalité	
		H_0 est vrai	H_1 est vrai
La décision	H_0 accepté	$\mathbf{1-\alpha}$	**Erreur** β
	H_0 rejetée	**Erreur** $\boldsymbol{\alpha}$	$\mathbf{1-\beta}$

Erreur de 1er espèce

Le risque alpha est le risque qu'on prends quand on rejette l'hypothèse nulle et qu'elle est vrai en réalité.

Niveau de signification (α)

- Le risque alpha est le risque qu‘on prends quand on rejet la hypothèse nulle et elle est vrai en réalité

- 0.05 significatif
- 0.01 hautement significatif
- 0.001 très hautement significatif

Le schéma

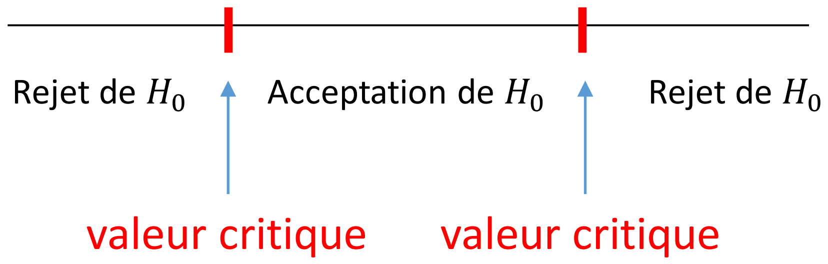
On a une question…

1) Définir H_0 et H_1
2) Choisir le niveau de signification
3) Choisir le test statistique
4) Calculer la valeur du test
5) Déterminer la/les valeur(s) critique(es)

Le schéma

On a une question…

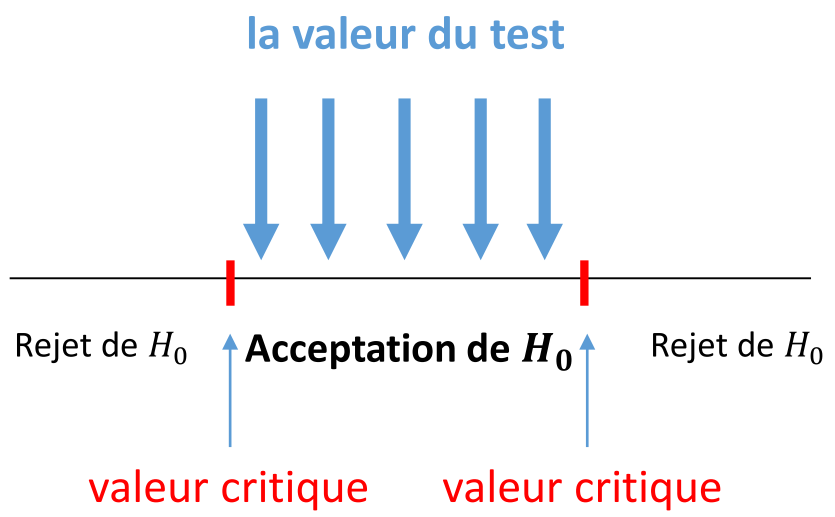
1) Définir H_0 et H_1
2) Choisir le niveau de signification
3) Choisir le test statistique
4) Calculer la valeur du test
5) Déterminer la/les valeur(s) critique(es)



Le schéma

On a une question…

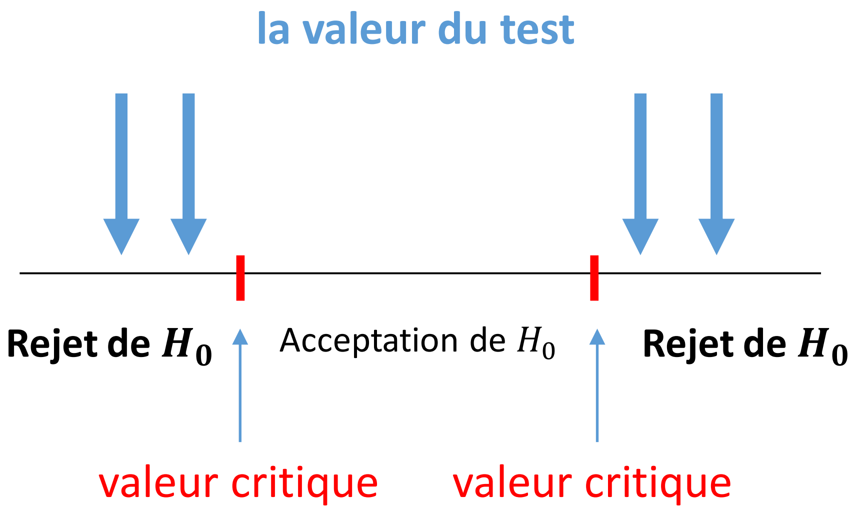
1) Définir H_0 et H_1
2) Choisir le niveau de signification
3) Choisir le test statistique
4) Calculer la valeur du test
5) Déterminer la/les valeur(s) critique(es)
6) Décision - comparer la/les valeur(s) critique(es) avec la valeur du test



Le schéma

On a une question…

1) Définir H_0 et H_1
2) Choisir le niveau de signification
3) Choisir le test statistique
4) Calculer la valeur du test
5) Déterminer la/les valeur(s) critique(es)
6) Décision - comparer la/les valeur(s) critique(es) avec la valeur du test



Comparaison des moyennes de 2 grands échantillons indépendants (n1 et n2 >30):

$n_1 > 30 \; et \; n_2 > 30$

Deux échantillons qui suivent des lois normales:
μ_1, $\sigma^2{}_1$; μ_2, $\sigma^2{}_2$

$$\boxed{Z_c = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_{x_1}^2}{n_1} + \frac{s_{x_2}^2}{n_2}}}}$$

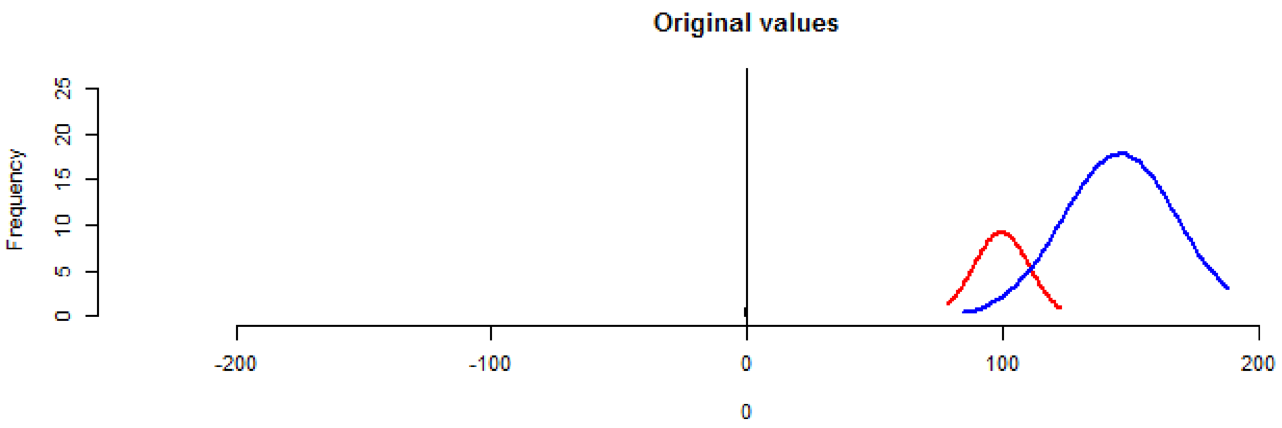
$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

Si H_0 est vraie, Z_c suit une loi normale N(0,1)

Comparaison des moyennes de 2 grands échantillo

$n_1 > 30 \; et \; n_2 > 30$

Deux échantillons qui suivent des lois normale
$\mu_1, \sigma^2{}_1; \mu_2, \sigma^2{}_2$



$$\boxed{Z_c = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_{x_1}^2}{n_1} + \frac{s_{x_2}^2}{n_2}}}}$$

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

Si H_0 est vraie, Z_c suit une loi normale N(0,1)

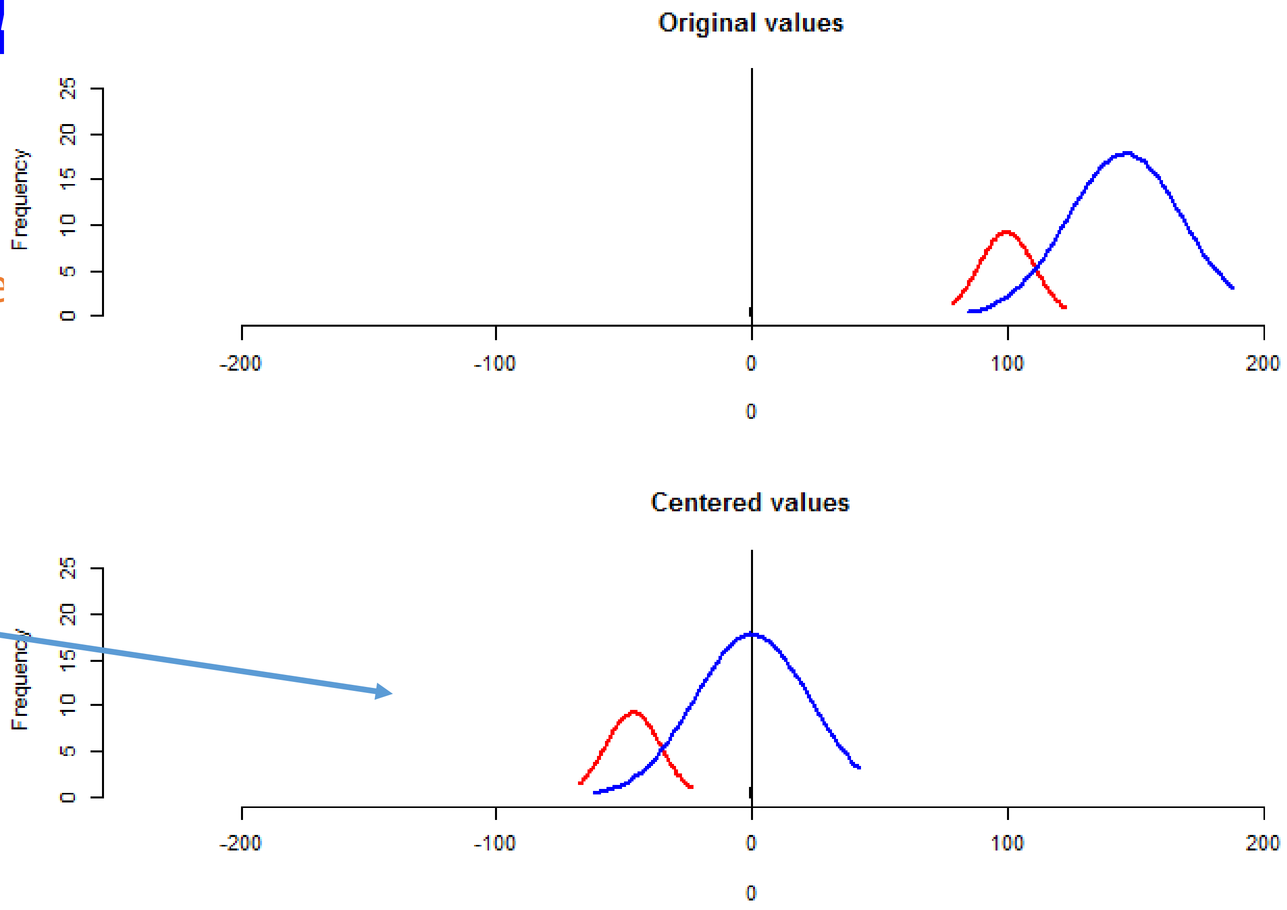
Comparaison des moyennes de 2 grands échantillo

$n_1 > 30 \; et \; n_2 > 30$

Deux échantillons qui suivent des lois normale

$\mu_1, \sigma^2{}_1; \mu_2, \sigma^2{}_2$

$$\boxed{Z_c = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_{x_1}^2}{n_1} + \frac{s_{x_2}^2}{n_2}}}}$$



$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

Si H_0 est vraie, Z_c suit une loi normale N(0,1)

Comparaison des moyennes de 2 grands échantillo

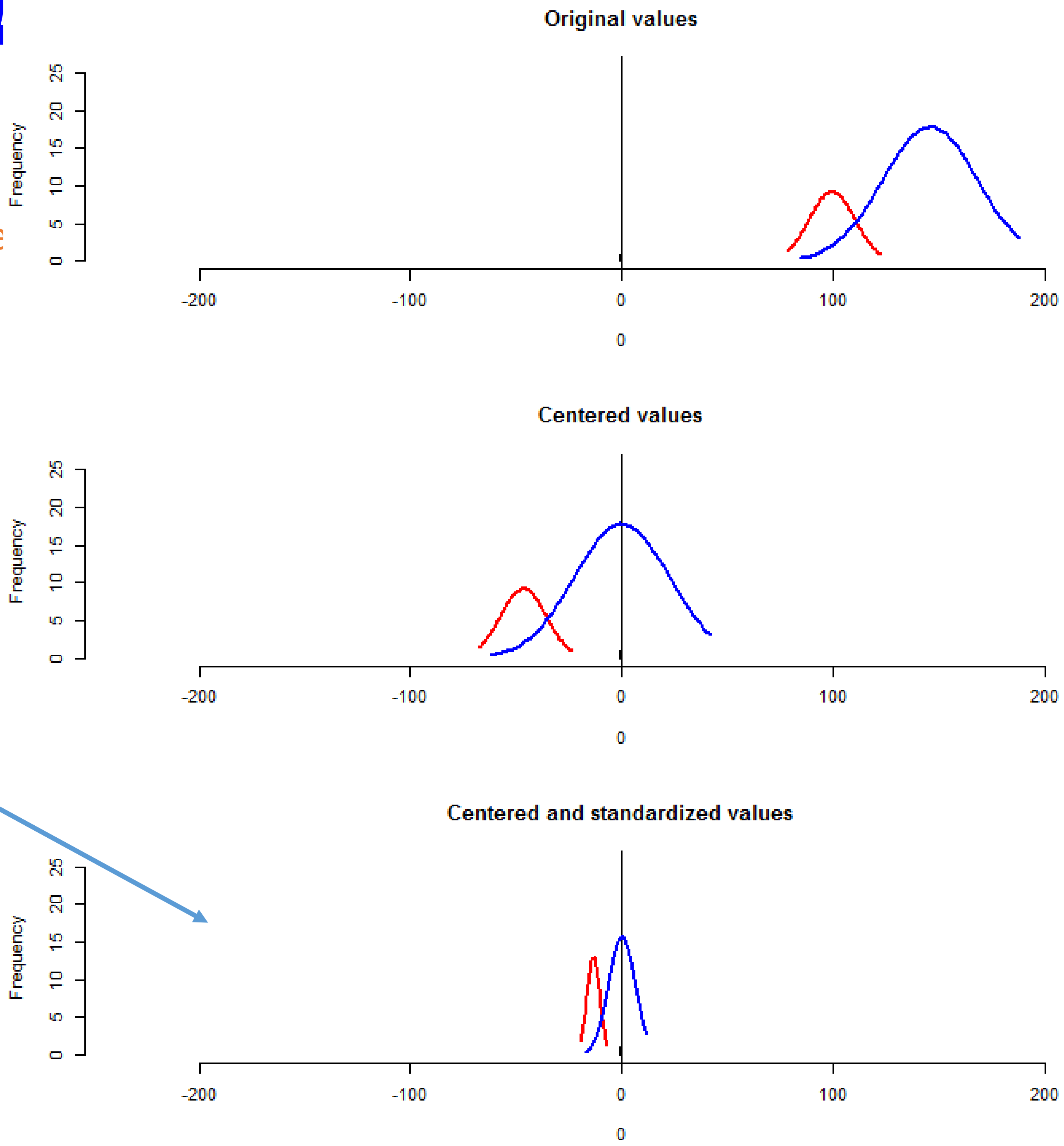
$n_1 > 30 \; et \; n_2 > 30$

Deux échantillons qui suivent des lois normale
$\mu_1, \sigma^2_1; \mu_2, \sigma^2_2$

$$\boxed{Z_c = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s^2_{x_1}}{n_1} + \frac{s^2_{x_2}}{n_2}}}}$$

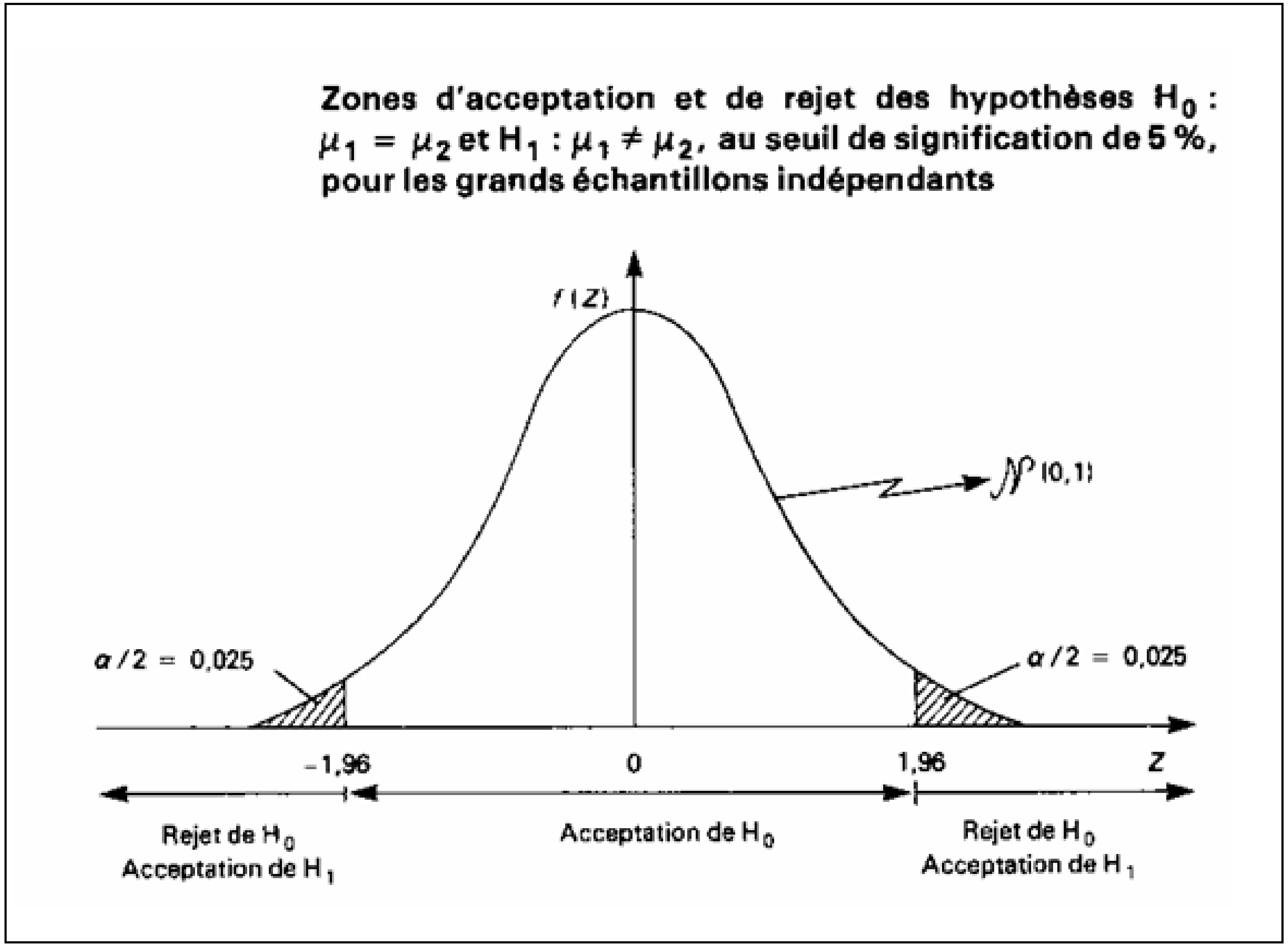
$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

Si H_0 est vraie, Z_c suit une loi normale N(0,1)



$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ bilatéral

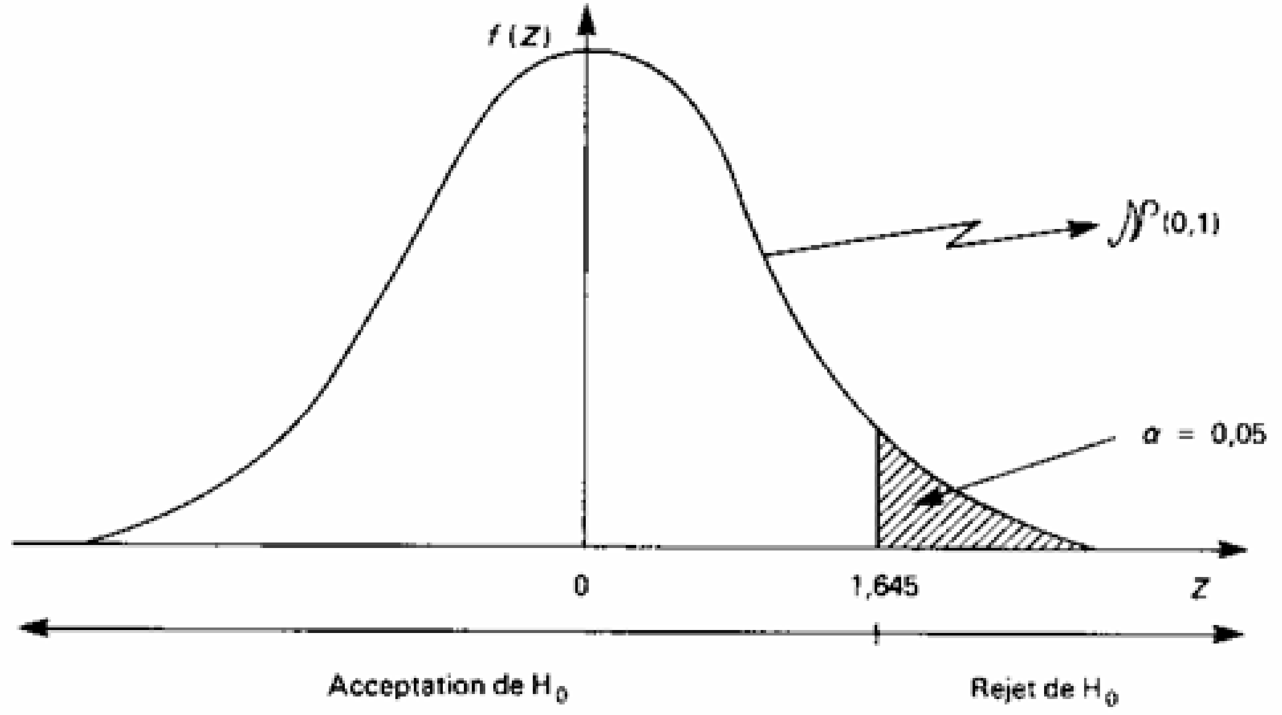


Exemple: $Z_c = 1;\ \alpha = 0.05$

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 > \mu_2$ unilatéral

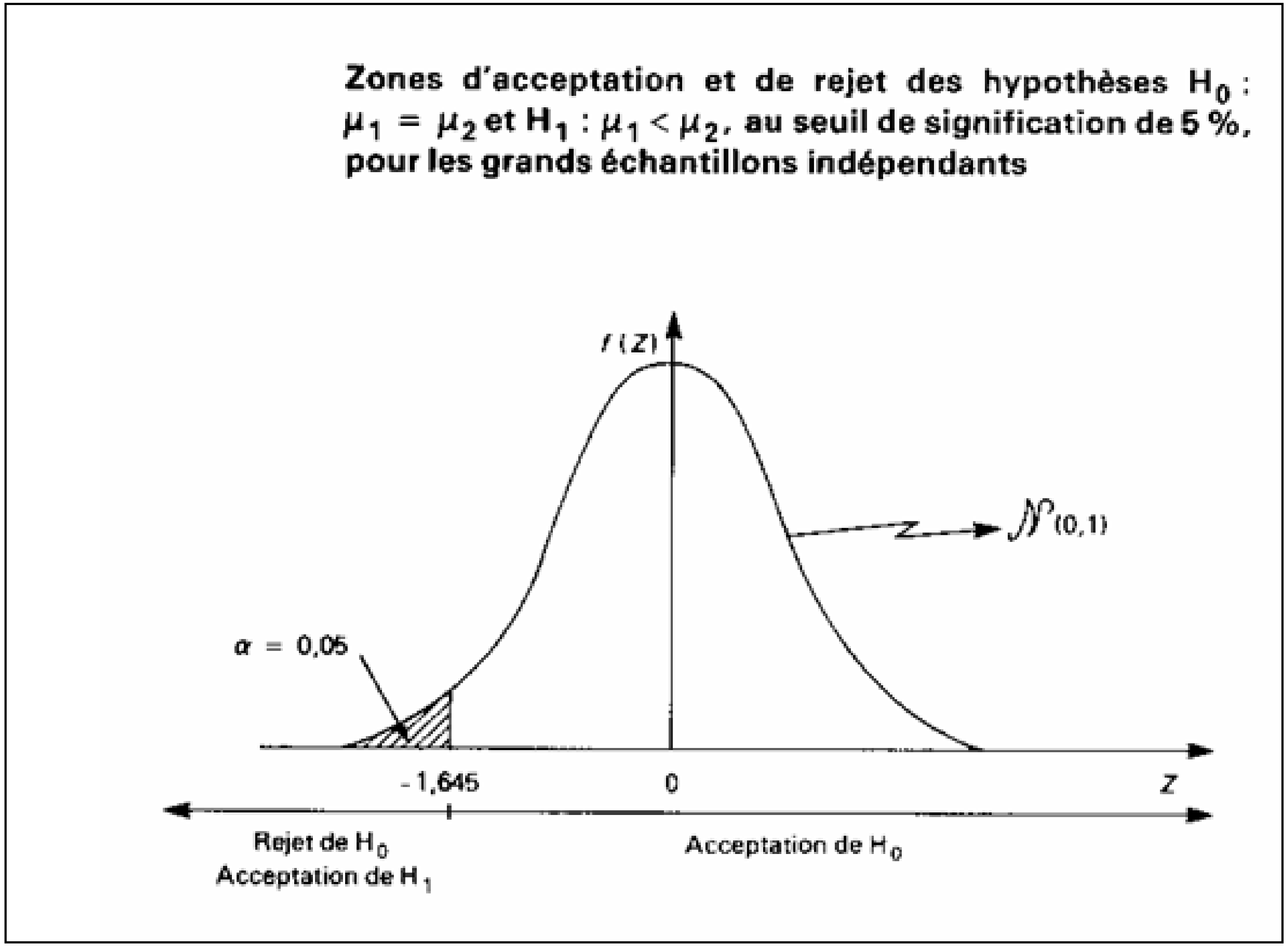
Zones d'acceptation et de rejet des hypothèses H_0 : $\mu_1 = \mu_2$ et $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ au seuil de signification de 5 %, pour les grands échantillons indépendants



Exemple: $Z_c = 2.3$; $\alpha = 0.05$

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 < \mu_2$ unilatéral



Exemple: $Z_c = 2.3;\ \alpha = 0.05$

Comparaison des moyennes de 2 grands échantillons indépendants (n1 et n2 >30):

$$Z_c = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_{x_1}^2}{n_1} + \frac{s_{x_2}^2}{n_2}}}$$

Exemple: Taille des silex sur deux sites

site A:

$n_1 = 50$

$\bar{x}_1 = 158{,}86\ mm$

$s_{x_1}^2 = 37{,}18\ mm^2$

site B:

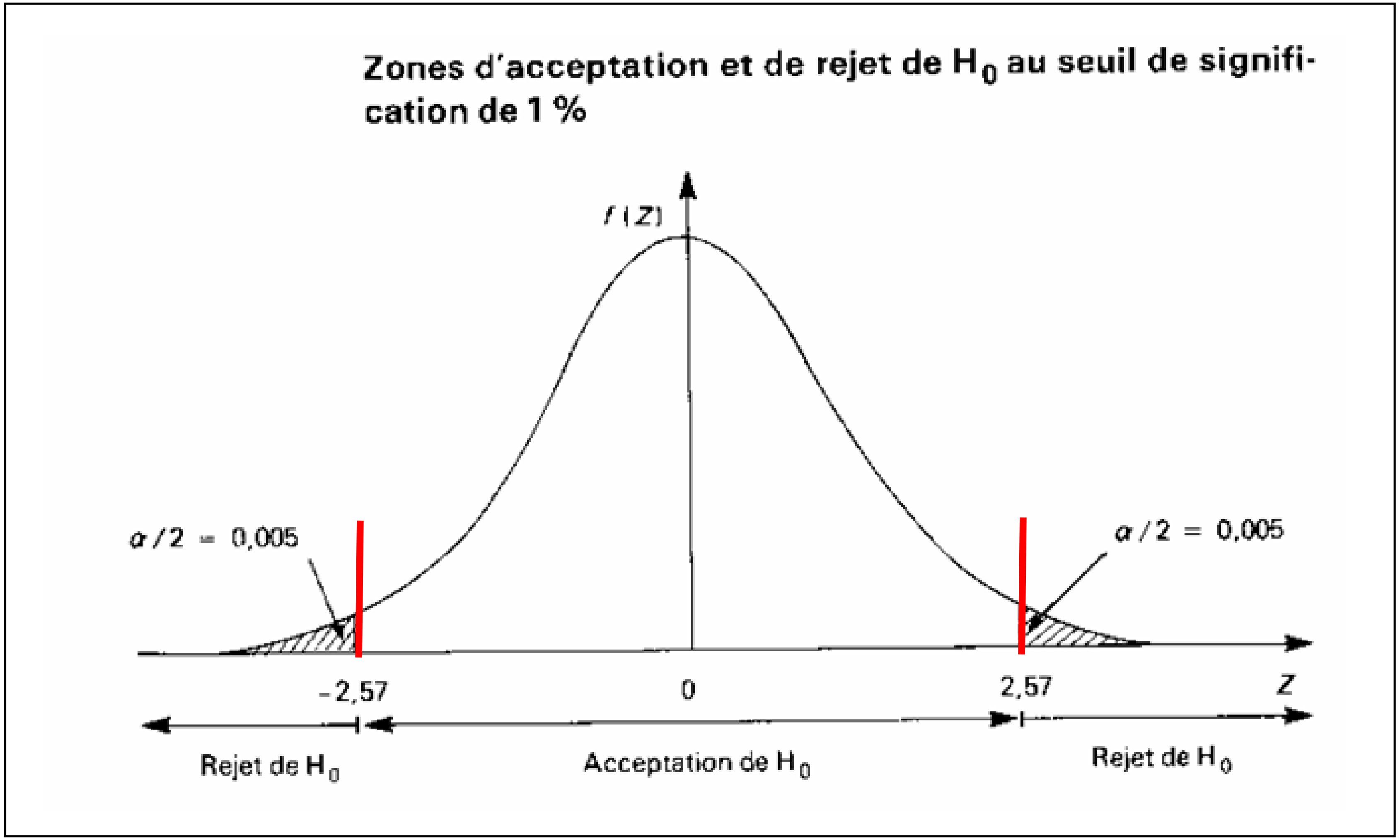
$n_2 = 67$

$\bar{x}_2 = 134{,}66\ mm$

$s_{x_2}^2 = 25{,}92\ mm^2$

Q: Les moyennes de ces deux échantillons prélevés indépendamment l'un de l'autre diffèrent-elles d'une façon hautement significative?

$Z_c = 22.9$



H_0 rejetée au seuil de signification de 1%

Cas des petits échantillons: Test t

Pourquoi?

Si n_1 et n_2 sont petits, s^2_{x1} et s^2_{x2} sont des estimateurs peu précis de σ^2.

Dans ce cas, la variable différence centrée réduite n'obéit plus à une loi normale mais à une loi de Student avec certain degrés de liberté

Degrés de liberté:

- $v = n_1 + n_2 - 2$

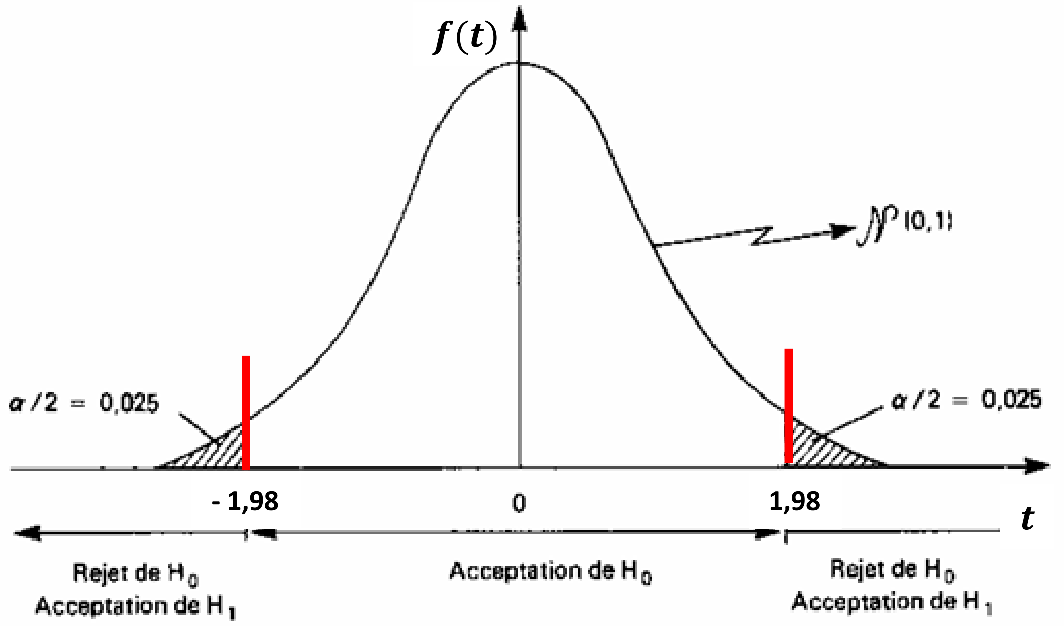
$$\boxed{t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_{x_1}^2 + (n_2 - 1)s_{x_2}^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}\right)}}}$$

Exemple: Taille des silex sur deux sites

site A:
$n_1 = 23$
$\bar{x}_1 = 158{,}9\ mm$
$s_{x_1}^2 = 37{,}2\ mm^2$

site B:
$n_2 = 27$
$\bar{x}_2 = 134{,}5\ mm$
$s_{x_2}^2 = 25{,}9\ mm^2$

$$\boxed{t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_{x_1}^2 + (n_2 - 1)s_{x_2}^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}\right)}}}$$



$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_{x_1}^2 + (n_2-1)s_{x_2}^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}\right)}}$$

Exemple: Taille des silex sur deux sites

site A:

$n_1 = 23$

$\bar{x}_1 = 158{,}9\ mm$

$s_{x_1}^2 = 37{,}2\ mm^2$

site B:

$n_2 = 27$

$\bar{x}_2 = 134{,}5\ mm$

$s_{x_2}^2 = 25{,}9\ mm^2$

$H_0: \bar{x}_1 = \bar{x}_2$

$H_1: \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$

$$t = \frac{158{,}9 - 134.5}{\sqrt{\frac{(23-1)*37.2+(27-1)*25.9}{23+27-2}\left(\frac{23+27}{23*27}\right)}} = 15.38$$

$\alpha = 0.05,\qquad t_{\alpha/2;\ \nu=48} = 1.98$

$H_1: \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$

H_0: $\mu=\mu_0$

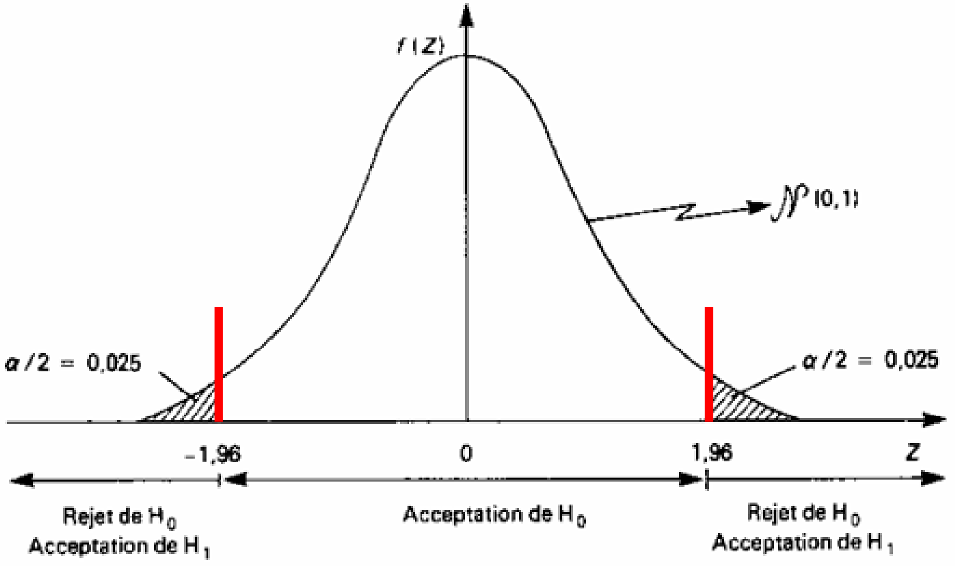
$$\boxed{Z_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s_x}{\sqrt{n}}}}$$

que l'on teste sur la loi normale N(0,1)

H_0: $\mu=\mu_0$

$$\boxed{Z_c = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{s_x}{\sqrt{n}}}}$$

que l'on teste sur la loi normale N(0,1)



Exemple: neanderthals…

neandertal:
$\mu_0 = 167\ cm$

hommes:
$n = 40$
$\bar{x} = 165\ cm$
$s_x = 8\ cm$

H_0: $\mu = \mu_0$
H_1: $\mu \neq \mu_0$

$$Z_c = \frac{165-167}{\frac{8}{\sqrt{40}}} = -1.58$$

$\alpha = 0.05$, $Z_{\alpha/2} = \pm 1.96$

H_0: $\mu = \mu_0$

Même principe que précédemment…

N < 30	**N > 30**
$$t_c = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{s_x}{\sqrt{n}}}$$	$$Z_c = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{s_x}{\sqrt{n}}}$$

que l'on teste sur la loi de Student

que l'on teste sur la loi normale N(0,1)

Apparié?

Un échantillon mesuré en deux conditions

- Avant et après
- Par deux personnes différents

Exemples:

- différence entre le poids des patients avant et après ?
- Différence entre le poids mesuré par Marie et Antoine ?

$$\boxed{t = \frac{\sum D}{\sqrt{\frac{n \sum D^2 - (\sum D)^2}{n-1}}}}$$

$$\boldsymbol{v = n - 1}$$

$\sum D$ la somme des différences entre les mesures

$\sum D^2$ la somme des différences carrées entre les mesures

n : la taille d'échantillon

Apparié?

Un échantillon mesuré en deux conditions

- Avant et après
- Par deux personnes différents

Exemples:

- différence entre le poids des patients avant et après ?
- Différence entre le poids mesuré par Marie et Antoine ?

$$\boxed{t = \frac{\sum D}{\sqrt{\frac{n\sum D^2 - (\sum D)^2}{n-1}}}}$$

$$\boldsymbol{v = n - 1}$$

$\sum D$ la somme des différences entre les mesures

$\sum D^2$ la somme des différences carrées entre les mesures

n : la taille d'échantillon

Exemple: Marie et Antoine ont mesuré la taille des 30 tessons.

Est-ce qu'ils ont mesuré de la même façon ?

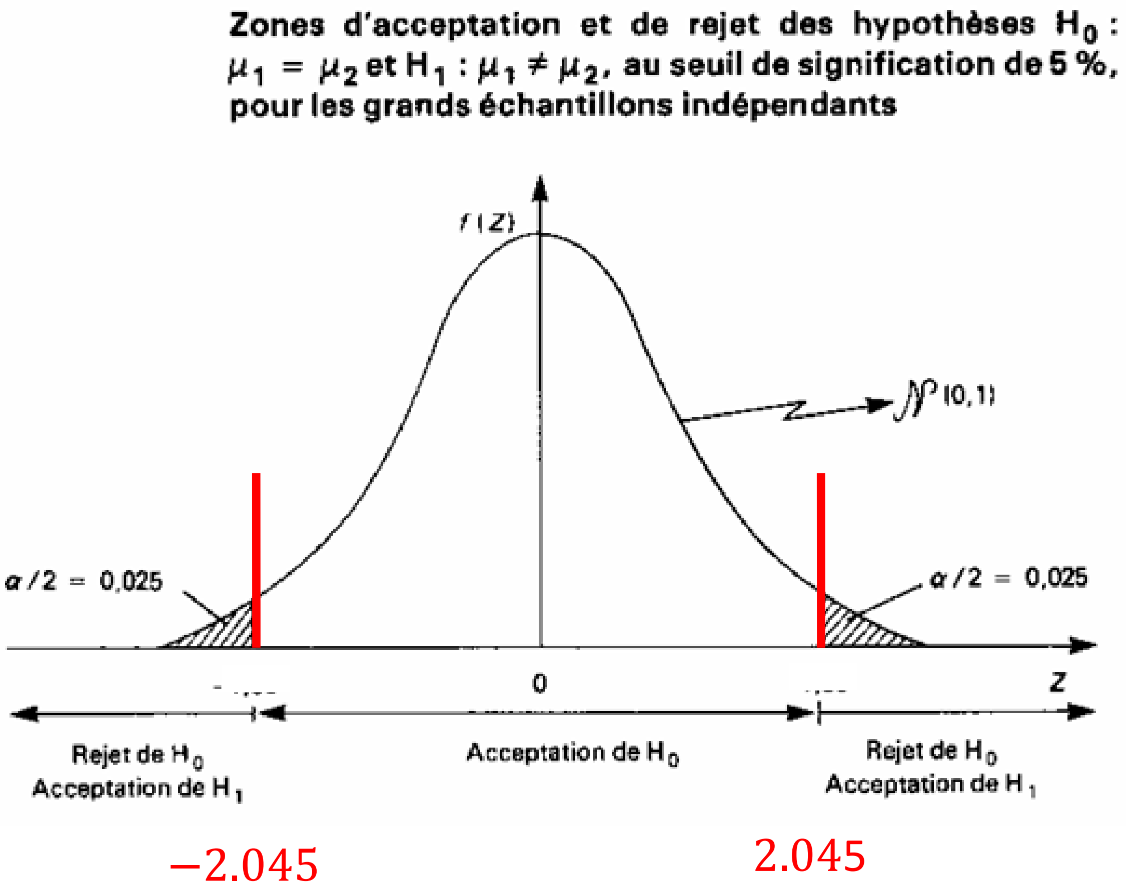
H_0: *pas de différence*

H_1: *il y a une difference*

	Marie	Antoine	D	D^2
Tesson 1	2	3	-1	1
Tesson 2	4	2	2	4
Tesson 3	5	5	0	0
Tesson 4	7	8	-1	1
…	…	…	…	…
Tesson 30	13	12	1	1
$\sum$	253	250	3	87

$$t = \frac{3}{\sqrt{\frac{30 * 87 - (3)^2}{30 - 1}}} = 0.32$$

$$t_{\alpha/2;\, v=29} = \pm 2.045$$



Exemple: Marie et Antoine ont mesuré la taille des 30 tessons.
Est-ce qu'ils ont mesuré de la même façon ?

H_0: *pas de différence*
H_1: *il y a une difference*

	Marie	Antoine	D	D^2
Tesson 1	2	3	-1	1
Tesson 2	4	2	2	4
Tesson 3	5	5	0	0
Tesson 4	7	8	-1	1
…	…	…	…	…
Tesson 30	13	12	1	1
$\sum$	253	250	3	87

$$t = \frac{3}{\sqrt{\frac{30 * 87 - (3)^2}{30 - 1}}} = 0.32$$

$$t_{\alpha/2;\, v=29} = \pm 2.045$$